

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

**А.И. Малышев**

# Избранные главы теории нелинейных колебаний: резонансная теория возмущений

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией физического факультета для  
студентов ННГУ, обучающихся по направлению 011200 «Физика»

Нижний Новгород  
2012

УДК 530.182

ББК В 22.213+22.311

М 20

М 20 Малышев А.И. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ: РЕЗОНАНСНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ: учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 21 с.

**Рецензент:**

доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, к.ф.-м.н. **Канаков О.И.**

В настоящем пособии представлен материал по теме «Резонансная теория возмущений», входящей в учебный курс «Нелинейные колебания и волны», читаемый на физическом факультете ННГУ. Кроме необходимых теоретических выкладок, связанных с понятием нелинейного резонанса и перекрытием резонансов, представлен материал практического характера, содержащий, в частности, сопоставление с результатами численного моделирования.

УДК 530.182

ББК В 22.213+22.311

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2012

## Введение

Как известно, каноническая теория возмущений в случае числа степеней свободы, большего единицы, *не работает* вблизи резонансов, т.е. в областях, где

$$(\vec{m} \cdot \vec{\omega}(\vec{I})) \rightarrow 0,$$

где  $\vec{\omega}(\vec{I})$  – вектор невозмущенных частот системы, являющихся, как правило, функциями вектора действия  $\vec{I}$ , а  $\vec{m}$  – вектор с целочисленными компонентами. Неработоспособность теории оказывается связанной с тем, что ввиду малости скалярного произведения  $(\vec{m} \cdot \vec{\omega}(\vec{I}))$  ряды последовательных приближений теории начинают расходиться. Это означает, что адекватное описание поведения системы вблизи резонанса требует отдельного рассмотрения и построения *резонансной теории возмущений*. Этому вопросу и посвящено настоящее пособие.

## I. Резонанс связи двух степеней свободы

Выполним пример построения резонансной теории возмущений для системы с двумя степенями свободы, чей гамильтониан в переменных действие-угол имеет следующий вид:

$$H(I_1, I_2, \vartheta_1, \vartheta_2) = H_0(I_1, I_2) + \varepsilon V(I_1, I_2, \vartheta_1, \vartheta_2). \quad (1)$$

Здесь  $H_0(I_1, I_2)$  – гамильтониан невозмущенной системы, а второе слагаемое описывает возмущение, малость которого определяется параметром  $\varepsilon$ . Невозмущенные частоты колебаний определяются известным образом:

$$\omega_{1,2} = \frac{\partial H_0}{\partial I_{1,2}}. \quad (2)$$

Рассмотрим подробнее резонанс

$$n\omega_1 - m\omega_2 = 0, \quad (3)$$

где  $n$  и  $m$  – положительные целые числа. Поскольку речь идет о резонансе между колебаниями по двум разным степеням свободы в замкнутой системе, такой резонанс еще называют *внутренним резонансом* или *резонансом связи*. Заметим также, что последнее равенство может быть записано в виде скалярного произведения векторов  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$  и  $\vec{m} = (n, -m)$ .

Поскольку на резонансе разность  $n\omega_1 - m\omega_2$  равна нулю, то вблизи резонанса разность  $n\vartheta_1 - m\vartheta_2$  является медленной функцией времени по сравнению, например, с  $\vartheta_1(t)$  и  $\vartheta_2(t)$ . Используем это – совершим каноническое преобразование посредством производящей функции

$$F_2 = \frac{m\vartheta_1 + n\vartheta_2}{\sqrt{n^2 + m^2}} J_1 + \frac{n\vartheta_1 - m\vartheta_2}{\sqrt{n^2 + m^2}} J_2, \quad (4)$$

откуда

$$\begin{cases} I_1 = (mJ_1 + nJ_2) / \sqrt{n^2 + m^2} \\ I_2 = (nJ_1 - mJ_2) / \sqrt{n^2 + m^2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \vartheta_1 = (m\psi_1 + n\psi_2) / \sqrt{n^2 + m^2} \\ \vartheta_2 = (n\psi_1 - m\psi_2) / \sqrt{n^2 + m^2} \end{cases} \quad (5)$$

Легко заметить, что такое каноническое преобразование соответствует повороту системы координат в плоскостях частот  $(\omega_1, \omega_2)$  и действий  $(I_1, I_2)$  (см. рис. 1). Таким образом, новыми угловыми переменными становятся *быстрая фаза*

$$\psi_1 = \frac{m\vartheta_1 + n\vartheta_2}{\sqrt{n^2 + m^2}} \quad (6)$$

и *медленная фаза*

$$\psi_2 = \frac{n\vartheta_1 - m\vartheta_2}{\sqrt{n^2 + m^2}}. \quad (7)$$

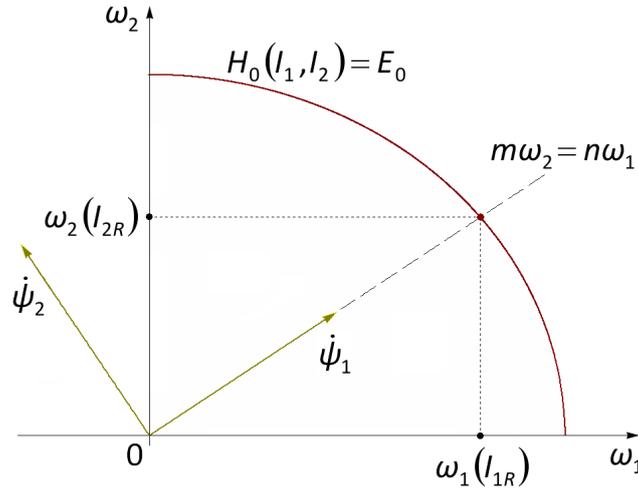


Рис. 1. Иллюстрация к каноническому преобразованию (5)

Прежде, чем перейти в гамильтониане к новым переменным, заметим следующее. Функция возмущения, вообще говоря, является периодической функцией переменных  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$ , поэтому может быть разложена в двойной ряд Фурье:

$$V(I_1, I_2, \vartheta_1, \vartheta_2) = \sum_{n', m' \neq 0} V_{n', m'}(I_1, I_2) \cdot e^{i(n'\vartheta_1 + m'\vartheta_2)}. \quad (8)$$

При этом для простоты положили, что среднее значение возмущения равно нулю. Если это не так, то возможны два варианта – либо среднее значение является функцией только переменных действия, либо оно является константой. В первом случае слагаемое  $V_{0,0}(I_1, I_2)$  может быть включено в невозмущенную часть гамильтониана, что приведет к небольшому изменению невозмущенных частот (2), которое может быть описано в рамках канонической теории возмущений. Во втором случае, постоянная составляющая гамильтониана может быть вовсе исключена.

Таким образом, гамильтониан (1) приобретает следующий вид:

$$H = H_0(J_1, J_2) + \varepsilon \sum_{n', m' \neq 0} V_{n', m'}(J_1, J_2) \cdot e^{i \frac{n'(m\psi_1 + n\psi_2) + m'(n\psi_1 - m\psi_2)}{\sqrt{n^2 + m^2}}}. \quad (9)$$

Усредним его по быстрой фазе  $\psi_1$ , в результате получим:

$$\bar{H} \approx H_0(J_1, J_2) + \varepsilon \sum_{n' \neq 0} V_{n', -n' \frac{m}{n}}(J_1, J_2) \cdot e^{i \frac{n'}{n} \sqrt{n^2 + m^2} \cdot \psi_2}, \quad (10)$$

а также оставим в сумме по  $n'$  самые медленные слагаемые – с  $n' = \pm n$ :

$$\bar{H} \approx H_0(J_1, J_2) + \varepsilon V_{n, -m}(J_1, J_2) \cdot e^{i \sqrt{n^2 + m^2} \cdot \psi_2} + \varepsilon V_{-n, m}(J_1, J_2) \cdot e^{-i \sqrt{n^2 + m^2} \cdot \psi_2}. \quad (11)$$

Обе оставшиеся гармоники обычно примерно равны друг другу, поэтому положим далее для простоты<sup>1</sup>

$$V_{n, -m}(J_1, J_2) = V_{-n, m}(J_1, J_2) \equiv -\frac{V_0(J_1, J_2)}{2}. \quad (12)$$

<sup>1</sup> Замечание, касающееся этого равенства, будет сделано в заключение настоящего раздела.

В результате гамильтониан (11) примет вид:

$$\bar{H} \approx H_0(J_1, J_2) - \varepsilon V_0(J_1, J_2) \cos(\sqrt{n^2 + m^2} \cdot \psi_2). \quad (13)$$

Из канонических уравнений,

$$\begin{cases} \dot{J}_1 = 0, \\ \dot{J}_2 = -\varepsilon V_0(J_1, J_2) \sqrt{n^2 + m^2} \sin(\sqrt{n^2 + m^2} \cdot \psi_2) \propto \varepsilon, \end{cases} \quad (14)$$

следует, что  $J_1(t) = J_{10} = \text{const}$ , а  $J_2(t)$  меняется мало, на величину порядка  $\varepsilon$ . Это позволяет сделать в гамильтониан подстановку  $J_{10}$  вместо  $J_1$ , и  $J_{20} + \tilde{J}(t)$  вместо  $J_2$ , а также произвести разложение его слагаемых в ряд Тейлора с точностью до первого неисчезающего порядка по  $\tilde{J}$ :

$$\bar{H} \approx H_0(J_{10}, J_{20}) + \frac{\partial H_0}{\partial J_2} \tilde{J} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_2^2} \tilde{J}^2 - \varepsilon V_0(J_{10}, J_{20}) \cos(\sqrt{n^2 + m^2} \cdot \psi_2). \quad (15)$$

Здесь необходимо заметить, что значения  $J_{10}$  и  $J_{20}$  отвечают области резонанса и определяются в соответствии с (5) резонансными значениями действий  $I_{1R}$  и  $I_{2R}$ . В результате второе слагаемое в правой части последнего соотношения оказывается равным нулю:

$$\left. \frac{\partial H_0}{\partial J_2} \right|_{\substack{J_1=J_{10}, \\ J_2=J_{20}}} = \dot{\psi}_2 = 0. \quad (16)$$

Первое же слагаемое может быть исключено из гамильтониана как постоянная. Обозначая далее вторую производную  $\left. \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_2^2} \right|_{J_1=J_{10}, J_2=J_{20}}$  за  $K$ , получим *резонансный гамильтониан* (гамильтониан эффективно одномерной системы):

$$H_{res} = \frac{K}{2} \tilde{J}^2 - \varepsilon V_0 \cos(\sqrt{n^2 + m^2} \cdot \psi_2) \quad (17)$$

Легко видеть, что это есть гамильтониан математического маятника, что открывает возможность найти основные параметры резонанса, такие как *ширина* и *частота малых колебаний*.

Для расчета ширины резонанса необходимо получить уравнение его *сепаратрисы* – кривой, отделяющей траектории, попавшие в резонанс, от траекторий возмущенных, но не попавших в резонанс. Применительно к математическому маятнику сепаратрисой является кривая, разделяющая в фазовой плоскости области с колебательным и вращательным режимами движения; на рис. 2 она показана красным цветом. Итак, положим энергию системы равной максимальной потенциальной энергии, т.е.  $\varepsilon V_0$ , тогда

$$\varepsilon V_0 = \frac{K}{2} \tilde{J}^2 - \varepsilon V_0 \cos(\sqrt{n^2 + m^2} \cdot \psi_2) \Rightarrow \tilde{J} = \pm 2 \sqrt{\frac{\varepsilon V_0}{K}} \cos\left(\frac{\sqrt{n^2 + m^2}}{2} \cdot \psi_2\right) \quad (18)$$

Тогда ширина резонанса:

$$\Delta \tilde{J} = 4 \sqrt{\frac{\varepsilon V_0}{K}} \quad (19)$$

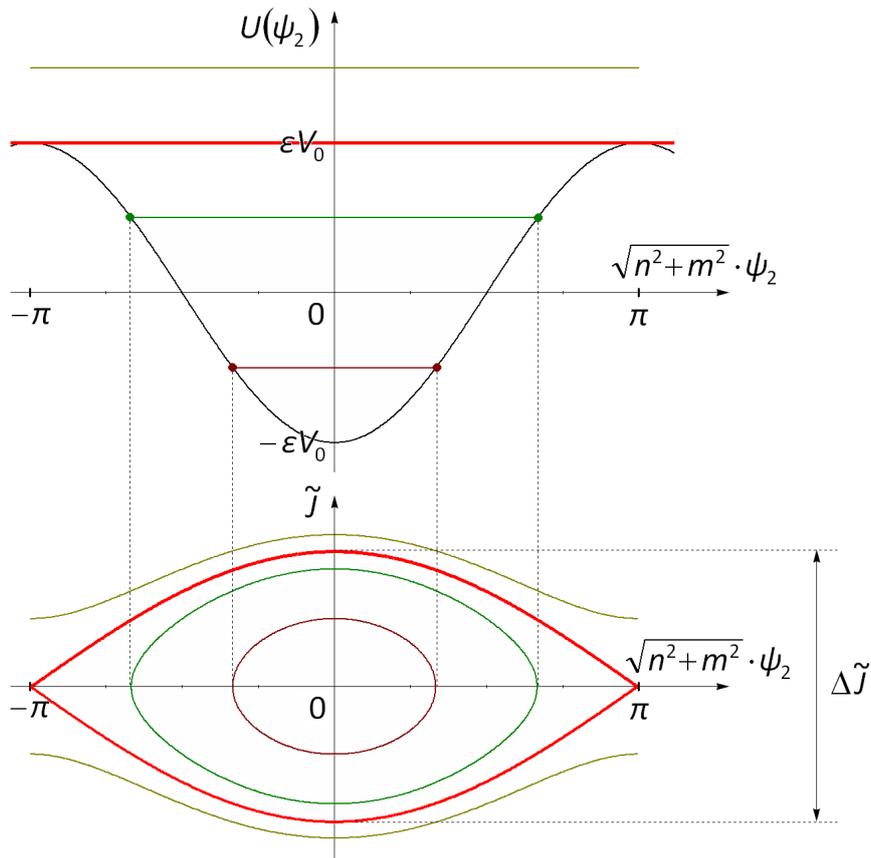


Рис. 2. Сверху: зависимость потенциальной энергии  $U(\psi_2) = \varepsilon V_0 \cos(\sqrt{n^2 + m^2} \cdot \psi_2)$  в резонансном гамильтониане от угла. Снизу: фазовый портрет математического маятника – фазовый портрет нелинейного резонанса. На обоих рисунках сепаратриса показана красным цветом

Что касается частоты малых колебаний вблизи центра резонанса, она может быть определена на основе уравнений движения. Так из канонических уравнений для гамильтониана (17) следует, что:

$$\ddot{\psi}_2 + \varepsilon K V_0 \sqrt{n^2 + m^2} \sin(\sqrt{n^2 + m^2} \cdot \psi_2) = 0 \quad (20)$$

Считая отклонения от центра резонанса малыми, разложим второе слагаемое в ряд Тейлора до членов первого порядка по  $\psi_2$ , получим уравнение гармонического осциллятора, откуда найдется и искомая частота:

$$\ddot{\psi}_2 + \varepsilon K V_0 (n^2 + m^2) \cdot \psi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{\omega} = \sqrt{\varepsilon K V_0 (n^2 + m^2)}} \quad (21)$$

**Итоговые замечания:**

1. Как следует из (19), ширина резонанса пропорциональна  $\sqrt{\varepsilon}$ , что при малых значениях  $\varepsilon$  много больше, чем  $\varepsilon^1$  и, конечно,  $\varepsilon^2$ . Отчасти по этой причине резонанс принципиально не мог быть описан в рамках канонической теории возмущений, где разложение ведется именно по целочисленным степеням малого параметра.
2. Если бы вместо равенства (12) выбрали  $V_{n,-m}(J_1, J_2) = V_{-n,m}(J_1, J_2) \cdot e^{i\alpha}$ , где  $\alpha$  – некоторая фаза, то получили бы качественно ту же картину резонанса, лишь сдвинутую вдоль горизонтальной оси  $\psi_2$ .

## II. Резонанс в системе с полутора степенями свободы

В предыдущем разделе обсуждалось построение резонансной теории возмущений на примере консервативной системы с двумя степенями свободы – был описан так называемый *внутренний резонанс* между степенями свободы или *резонанс связи*. Рассмотрим теперь резонанс другой природы – резонанс между колебаниями одномерной нелинейной системы и внешним периодическим по времени полем.

Для начала определимся с терминологией, ибо понятие полуцелого числа степеней свободы совсем не тривиально. Вообще, под *числом степеней свободы* в механике принято понимать количество обобщенных координат, необходимое для однозначного описания положения системы. При этом в случае  $N$  степеней свободы задача математически сводится к решению системы из  $2N$  дифференциальных уравнений первого порядка (или  $N$  уравнений второго порядка). При решении задач биомеханики, электромеханики и т.п. зачастую возникает ситуация, когда количество дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих систему, является нечетным. А поскольку привычной является ситуация, когда число степеней свободы вдвое меньше числа уравнений, то и появилось понятие полуцелого числа степеней свободы. Впоследствии оно расширило границы своей применимости. Скажем, в книге [6] система с  $N$  степенями свободы и периодической зависимостью от времени в гамильтониане называется системой с  $N + 1/2$  степенями свободы, поскольку «*время является дополнительной канонической переменной*», похожей на угловую переменную.

Итак, рассмотрим механическую систему с гамильтонианом:

$$H(I, \vartheta, t) = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta, t). \quad (22)$$

Здесь  $\varepsilon$  – малый параметр. Переменные действие-угол относятся к невозмущенной системе  $H_0(I)$ , ее частота:

$$\omega(I) = \frac{dH_0}{dI}. \quad (23)$$

Как уже указывалось, внешнее поле периодически по времени:  $V(I, \vartheta, t + T) = V(I, \vartheta, t)$ . Также как обычно есть и периодичность по переменной  $\vartheta$  с периодом  $2\pi$ . Разложим слагаемое возмущения в двойной ряд Фурье с нулевым средним:

$$V(I, \vartheta, t) = \sum_{n,m} V_{n,m}(I) e^{i(n\vartheta + m\Omega t)}. \quad (24)$$

Здесь  $\Omega = 2\pi/T$  – характерная частота внешнего поля, а суммирование по обоим индексам идет в бесконечных пределах. Что касается среднего значения возмущения, опущенного в (24), относительно него можно сделать замечание, аналогичное сделанному ранее при записи ряда (8).

Рассмотрим далее резонанс  $\omega(I_R) = \Omega$  – это равенство является уравнением для определения резонансного значения действия  $I_R$ .

Как и в предыдущем разделе, заметим здесь, что вблизи резонанса, где  $l \approx l_R$ , разность частот  $\omega(l) - \Omega$  стремится к нулю, поэтому разность  $\vartheta - \Omega t$  является *медленной* функцией времени по сравнению с  $\vartheta$  или  $\Omega t$ .

Совершим каноническое преобразование посредством производящей функции

$$F_2 = (\vartheta - \Omega t)(J + I_R) \quad (25)$$

и введем фазу  $\psi = \vartheta - \Omega t$ , а также сдвинем начало отсчета по действию в область резонанса:  $J = I - I_R$ . Новый гамильтониан при этом приобретает вид:

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H_0(J + I_R) + \varepsilon \sum_{n,m} V_{n,m}(J + I_R) \cdot e^{i(n\psi + (n+m)\Omega t)} - \Omega \cdot (J + I_R). \quad (26)$$

Гамильтониан (26) все еще является точным. Далее сделаем ряд приближений. Так, поскольку речь идет о поведении динамической системы вблизи резонанса, будем рассматривать значения переменной  $J$  – малые по сравнению с  $I_R$ . Разложим слагаемые в гамильтониане в ряд Тейлора вблизи нуля по степеням  $J$ , оставляя лишь члены не выше второго порядка. Ввиду малости второго слагаемого, обеспечиваемой множителем  $\varepsilon$ , значение коэффициентов  $V_{n,m}(l)$  возьмем при резонансном значении действия. В итоге, получим

$$\tilde{H} \approx H_0(I_R) + (\omega(I_R) - \Omega) \cdot J + \frac{K}{2} J^2 + \varepsilon \sum_{n,m} V_{n,m}(I_R) \cdot e^{i(n\psi + (n+m)\Omega t)} - \Omega I_R, \quad (27)$$

где введено обозначение  $K = d^2 H_0 / dl^2 \big|_{l=I_R}$ . Исключим первое и последнее слагаемые как постоянные, а также занулим второе, поскольку  $\omega(I_R) = \Omega$ . В результате получим:

$$\tilde{H} \approx \frac{K}{2} J^2 + \varepsilon \sum_{n,m} V_{n,m}(I_R) \cdot e^{i(n\psi + (n+m)\Omega t)}. \quad (28)$$

Далее усредним это выражение по быстрой фазе  $\Omega t$  – останутся лишь слагаемые с  $m = -n$ :

$$\bar{\tilde{H}} \approx \frac{K}{2} J^2 + \varepsilon \sum_n V_{n,-n}(I_R) \cdot e^{in\psi}. \quad (29)$$

Оставляя теперь самые медленные слагаемые в сумме по  $n$ , будем иметь:

$$\bar{\tilde{H}} \approx \frac{K}{2} J^2 + \varepsilon (V_{1,-1}(I_R) \cdot e^{i\psi} + V_{-1,1}(I_R) \cdot e^{-i\psi}). \quad (30)$$

Как правило, в реальных системах  $|V_{1,-1}(I_R)| \approx |V_{-1,1}(I_R)|$ , поэтому положим далее

$$V_{1,-1}(I_R) = V_{-1,1}(I_R) \equiv -\frac{V_0}{2}, \quad (31)$$

(см. также замечание 2 на стр. 7) тогда резонансный гамильтониан примет вид:

$$H_{res} = \frac{K}{2} J^2 - \varepsilon V_0 \cos \psi \quad (32)$$

Как и при обсуждении внутреннего резонанса, вновь получили гамильтониан математического маятника. Это позволяет легко найти уравнение сепаратрисы резонанса:

$$\varepsilon V_0 = \frac{K}{2} J^2 - \varepsilon V_0 \cos \psi \Rightarrow \boxed{J = \pm 2 \sqrt{\frac{\varepsilon V_0}{K}} \cos \frac{\psi}{2}} \quad (33)$$

и его ширину

$$\boxed{\Delta J = 4 \sqrt{\frac{\varepsilon V_0}{K}}} \quad (34)$$

Из уравнений движения, отвечающих гамильтониану (32), нетрудно рассчитать и частоту малых колебаний вблизи центра резонанса:

$$\begin{cases} \dot{j} = -\varepsilon V_0 \sin \psi \\ \dot{\psi} = KJ \end{cases} \Rightarrow \ddot{\psi} + \varepsilon K V_0 \sin \psi = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{\omega} = \sqrt{\varepsilon K V_0}} \quad (35)$$

Нетрудно заметить, что ввиду универсальности резонансного гамильтониана – гамильтониана математического маятника – выражения (33)-(35) аналогичны (18), (19) и (21), несмотря на то, что речь идет о физически различных механических системах.

### III. Перекрывание резонансов. Критерий Чирикова

Рассмотрим далее вопрос о взаимодействии нескольких резонансов. Какова будет структура фазового пространства, если резонансы окажутся достаточно близко друг от друга?

Представим себе, что внешнее периодическое поле  $V(I, \vartheta, t)$  имеет не одну гармонику, а несколько, причем одного порядка. Пусть, например, в возмущении можно выделить слагаемые с двумя разными частотами –  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Тогда можно говорить о двух нелинейных резонансах, существующих одновременно в фазовом пространстве системы, отличающихся резонансным значением действия:

$$\omega(I_{R1}) = \Omega_1 \quad \text{и} \quad \omega(I_{R2}) = \Omega_2. \quad (36)$$

Каждый из двух резонансов имеет свою ширину (34), между ними – фиксированное «расстояние» по действию, равное  $|I_{R1} - I_{R2}|$ . Известно, что с ростом амплитуды возмущения ширина резонансов растет, а значит, при некоторой критической амплитуде возмущения *они могут перекрыться!*

Простейший критерий перекрытия был предложен советским ученым [Б.В. Чириковым](#) в 70-х годах XX века: считая резонансы независимыми друг от друга, за момент перекрытия можно принять *касание их невозмущенных сепаратрис* (см. рис. 3). Кратко это выражается равенством:

$$\frac{1}{2}(\Delta J)_1 + \frac{1}{2}(\Delta J)_2 = |I_{R1} - I_{R2}|. \quad (37)$$

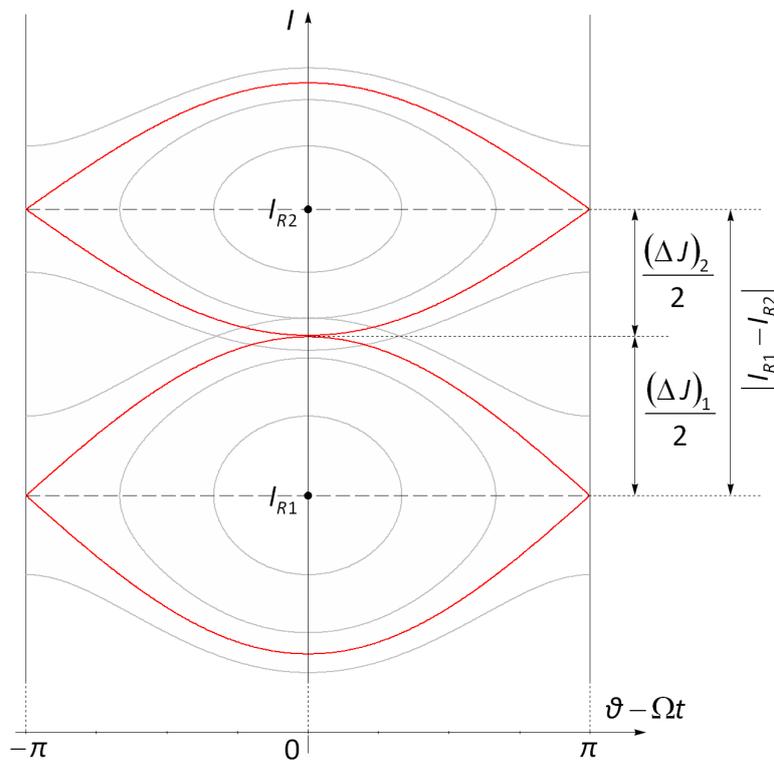


Рис. 3. Перекрывание резонансов по Чирикову – касание невозмущенных сепаратрис (показаны красным цветом).

Последнее соотношение можно считать уравнением на критическую величину возмущения, при которой резонансы перекрываются.

**Замечание.** Реально перекрытие резонансов происходит при меньших значениях амплитуды возмущения, чем следует из уравнения (37). Критерий Чирикова позволяет лишь оценить его по порядку величины. Сильной стороной критерия являются его наглядность и простота.

Перекрытие происходит раньше, поскольку с ростом амплитуды возмущения резонансы начинают «чувствовать друг друга», взаимодействовать. Их рассмотрение как независимых становится некорректным. Как следствие взаимодействия, сепаратрисы резонансов разрушаются, и на их месте образуются тонкие *стохастические слои* – малые области с хаотической динамикой. При дальнейшем увеличении амплитуды стохастические слои уширяются, начинают проявляться *резонансы более высоких порядков* и *вторичные резонансы*. Структура фазового пространства становится заметно сложнее и интереснее! Следующий раздел призван это проиллюстрировать.

В заключение заметим, что в случае, когда центры резонансов расположены при разных значениях угла  $\psi$  вдоль горизонтальной оси, возможны существенные отклонения от описанного выше сценария Чирикова. Даже в том случае, когда по вертикальной оси резонансы сближены на расстояние порядка полусуммы их ширин и даже менее, они все еще могут быть не перекрыты. Подобная ситуация была описана, например, в работе [9].

## IV. Примеры

**Пример 1.** Рассмотрим осциллятор с кубической нелинейностью, помещенный в слабое внешнее поле с двумя гармоническими составляющими<sup>2</sup>:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^4}{4} - f_0 x (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t). \quad (38)$$

Введем переменные действие-угол невозмущенной системы:

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^a \sqrt{2 \left( E - \frac{x^4}{4} \right)} dx \quad \Rightarrow \quad E = A \cdot I^{4/3}. \quad (39)$$

Здесь  $a = \sqrt[4]{4E}$  – амплитуда колебаний, величину которой можно выразить теперь через действие:  $a(I) = \sqrt[4]{4A} \cdot I^{1/3}$ . Константа  $A \approx 0.8671$ .

Поскольку нелинейность осциллятора не высока, положим  $x(I, \vartheta) \approx a(I) \cos \vartheta$ , тогда гамильтониан (38) принимает вид:

$$H = A I^{4/3} - f_0 \frac{a(I)}{2} (\cos(\vartheta - \Omega_1 t) + \cos(\vartheta - \Omega_2 t) + \cos(\vartheta + \Omega_1 t) + \cos(\vartheta + \Omega_2 t)). \quad (40)$$

Последние два слагаемых могут быть исключены как быстро осциллирующие, что соответствует усреднению по быстрой фазе при построении теории возмущений. Два оставшихся – отвечают за два резонанса на частотах  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Рассматривая их независимо, для каждого найдем резонансное значение действия и ширину резонанса:

$$I_{R1} = \left( \frac{3\Omega_1}{4A} \right)^3 \quad \text{и} \quad I_{R2} = \left( \frac{3\Omega_2}{4A} \right)^3, \quad (41)$$

$$\Delta I_1 = 6 \sqrt{\frac{f_0 \cdot I_{R1}}{2(4A)^{3/4}}} \quad \text{и} \quad \Delta I_2 = 6 \sqrt{\frac{f_0 \cdot I_{R2}}{2(4A)^{3/4}}}. \quad (42)$$

Применяя критерий Чирикова

$$3 \sqrt{\frac{f_0 \cdot I_{R1}}{2(4A)^{3/4}}} + 3 \sqrt{\frac{f_0 \cdot I_{R2}}{2(4A)^{3/4}}} = I_{R2} - I_{R1}, \quad (43)$$

найдем критическое значение амплитуды  $f_0$ , отвечающее моменту перекрытия резонансов:

$$\tilde{f}_0 = \frac{2(4A)^{3/4} (I_{R2} - I_{R1})^2}{9 (\sqrt{I_{R1}} + \sqrt{I_{R2}})^2} \quad (44)$$

Далее на рис. 4 представлены результаты численного моделирования – фазовые портреты системы при различных значениях амплитуды внешнего поля  $f_0$ .

<sup>2</sup> Эта модельная система была предложена Б.В. Чириковым и рассматривалась во многих его работах. См., в частности, [1]-[3].

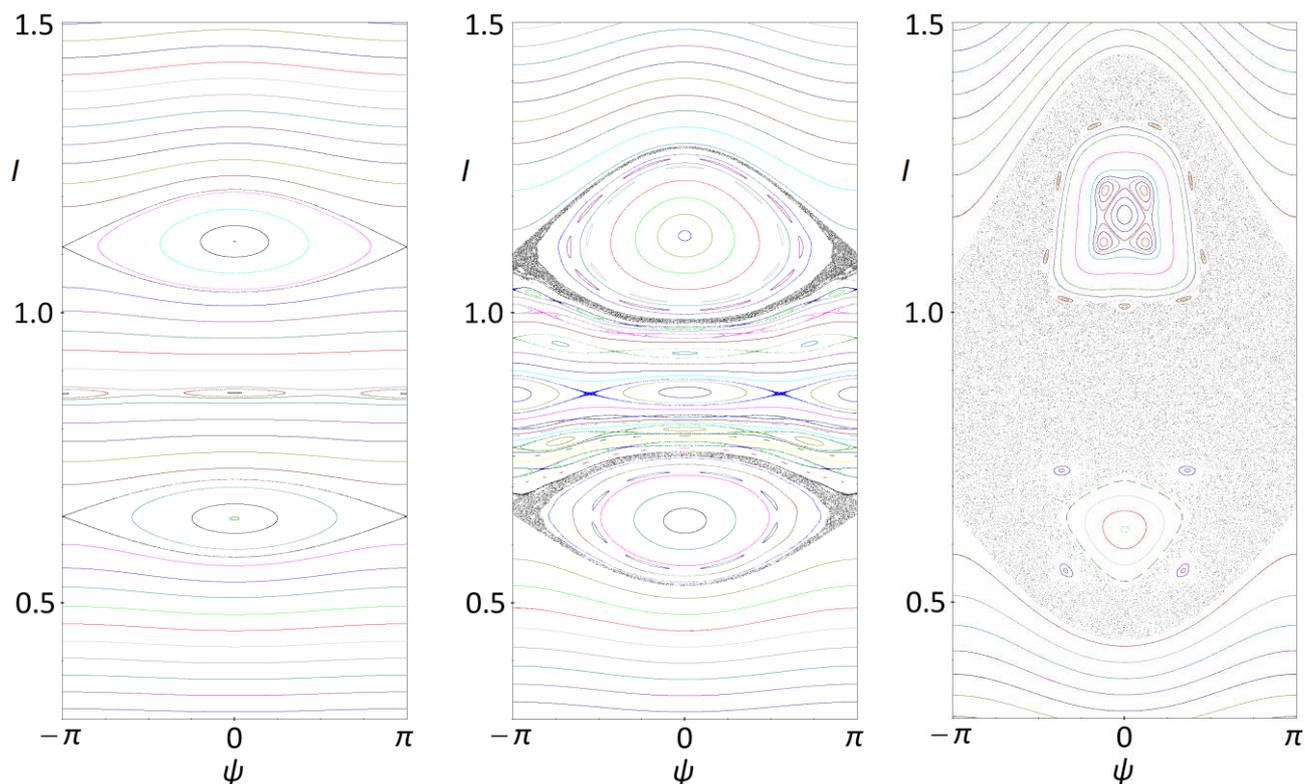


Рис. 4. Фазовые портреты системы (40) при значениях амплитуды внешнего поля  $f_0$  (слева направо): 0.001, 0.003 и 0.01. Разным начальным условиям отвечают точки разного цвета. Здесь  $\Omega_1 = 1$ ,  $\Omega_2 = 1.2$ , откуда  $I_{R1} \approx 0.647$  и  $I_{R2} \approx 1.118$ .

### **Особенности структуры фазового пространства (слева направо):**

- 1.** Амплитуда еще достаточно мала, отчего резонансы друг друга «не чувствуют». Хотя сепаратрисы уже разрушены, они все еще выглядят тонкими линиями. Как результат бигармоничности возмущения проявляет себя резонанс на полусумме двух частот.
- 2.** Активная фаза взаимодействия резонансов. Они окружены стохастическими слоями, образованными на месте разрушенных сепаратрис. В области между двумя резонансами проявилось множество резонансов более высоких порядков. Среди замкнутых, подобных эллипсам траекторий внутри каждого из основных резонансов можно видеть «цепочки» резонансов вторичных.
- 3.** Резонансы перекрыты, образовался общий стохастический слой. Остатки вторичных резонансов, а также малые области вблизи центров основных резонансов служат «островками стабильности в стохастическом море».

На странице <http://malyshev.professorjournal.ru/osc/practice/res> сайта, разработанного автором в рамках грантовой программы «Преподаватель он-лайн», размещено Java-приложение, с помощью которого можно исследовать структуру фазовой плоскости данной системы при различных значениях амплитуды внешнего поля и проследить за появлением на ней элементов хаоса.

**Пример 2.** Рассмотрим далее задачу о резонансах связи, которым был посвящен первый раздел настоящей работы. Пусть, к примеру, есть бесконечно глубокая двумерная потенциальная яма

$$U(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| < a/2 \text{ и } |y| < a/2, \\ \infty, & \text{если } |x| \geq a/2 \text{ и } |y| \geq a/2, \end{cases} \quad (45)$$

а слабое взаимодействие двух степеней свободы в ней описывается потенциалом вида<sup>3</sup>:

$$V(x, y) = -\mu(x + y) \left( xy - \frac{1}{2} \left( \frac{4a}{\pi^2} \right)^2 \right), \quad (46)$$

где  $\mu$  – малый параметр. Таким образом, движение материальной точки единичной массы внутри потенциальной ямы описывается следующим гамильтонианом:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} - \mu(x + y) \left( xy - \frac{1}{2} \left( \frac{4a}{\pi^2} \right)^2 \right). \quad (47)$$

Задача состоит в том, чтобы оценить по порядку величины значение  $\mu$ , при котором динамика системы становится хаотической.

Очевидно, что хаотическая динамика в данной системе может реализовываться лишь вследствие каких-то особенностей, вызванных взаимодействием степеней свободы. В контексте резонансной теории возмущений следует ожидать возникновения хаоса при перекрытии каких-то резонансов, когда образуется общий стохастический слой, при нахождении внутри которого поведение системы становится в известном смысле непредсказуемым. Для установления наличия в системе резонансов перейдем к переменным действие-угол невозмущенной системы (когда  $\mu = 0$ , и переменные разделяются).

Для одномерной бесконечно глубокой потенциальной ямы (в  $x$ -направлении от нуля до  $a$ ) переменные действие-угол вводятся без каких-либо сложностей. В результате получаем гамильтониан

$$H_0(I_x) = \frac{\pi^2}{2a^2} I_x^2, \quad (48)$$

а зависимость координаты  $x$  от новых переменных можно представить, например, в виде ряда Фурье:

$$x(\vartheta_x) = \frac{4a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\vartheta_x)}{(2n+1)^2} = \frac{4a}{\pi^2} \left( \cos\vartheta_x + \frac{\cos 3\vartheta_x}{9} + \frac{\cos 5\vartheta_x}{25} + \dots \right). \quad (49)$$

Поскольку амплитуда колебаний в прямоугольной потенциальной яме определяется лишь размером самой ямы, в последнем соотношении отсутствует зависимость от переменной действия. Частота колебаний определяется как обычно:

<sup>3</sup> Эта модельная система была предложена в работе [10] и использовалась для изучения диффузии Арнольда.

$$\omega_x = \frac{dH_0}{dl_x} = \frac{\pi^2}{a^2} l_x. \quad (50)$$

Поскольку вклад высоких гармоник в решение (49) сравнительно мал, положим далее  $x(\vartheta_x) = 4a/\pi^2 \cdot \cos\vartheta_x$ . Что касается движения в  $y$ -направлении, то все связанные с этим соотношения аналогичны.

Таким образом, гамильтониан (47) в переменных действие-угол после некоторых тригонометрических преобразований приобретает вид, подобный (40):

$$H(\bar{l}, \bar{\vartheta}) = \frac{\pi^2}{2a^2} \bar{l}^2 - \frac{\mu}{4} \left( \frac{4a}{\pi^2} \right)^3 (\cos(2\vartheta_x - \vartheta_y) + \cos(\vartheta_x - 2\vartheta_y) + \cos(2\vartheta_x + \vartheta_y) + \cos(\vartheta_x + 2\vartheta_y)). \quad (51)$$

Здесь последние два слагаемых в возмущении могут быть исключены как быстро осциллирующие, что соответствует усреднению по быстрой фазе при построении теории возмущений. Два оставшихся слагаемых отвечают за пару резонансов связи  $-2\omega_x = \omega_y$  и  $\omega_x = 2\omega_y$  соответственно.

Далее для примера рассмотрим подробнее резонанс  $2\omega_x = \omega_y$ . Возьмем гамильтониан

$$H(\bar{l}, \bar{\vartheta}) = \frac{\pi^2}{2a^2} \bar{l}^2 - \frac{\mu}{4} \left( \frac{4a}{\pi^2} \right)^3 \cos(2\vartheta_x - \vartheta_y) \quad (52)$$

и совершим поворот системы координат в плоскости действий посредством канонического преобразования, соответствующего (4): ориентируем новую ось  $l_1$  вдоль резонанса, а  $l_2$  – поперек. В результате получим гамильтониан, который уже не требует каких-либо дальнейших действий и является резонансным:

$$H(l_1, l_2, \psi_1, \psi_2) = \frac{\pi^2}{2a^2} (l_1^2 + l_2^2) - \frac{\mu}{4} \left( \frac{4a}{\pi^2} \right)^3 \cos\sqrt{5}\psi_2, \quad (53)$$

откуда легко найдем ширину резонанса:

$$\Delta l_2 = 16 \frac{a^2}{\pi^4} \sqrt{\mu a}. \quad (54)$$

Ширина резонанса  $\omega_x = 2\omega_y$  может быть рассчитана аналогично, что приводит к выражению, совпадающему с (54).

Обратимся теперь к вопросу о перекрытии двух резонансов связи. Качественно этот момент показан на рис. 5 в плоскости  $(l_x, l_y)$ . Ввиду соотношения (50) условия резонансов в переменных  $l_x, l_y$  выглядят так же, как и в переменных  $\omega_x, \omega_y$ :

$$2l_x = l_y \quad \text{и} \quad l_x = 2l_y. \quad (55)$$

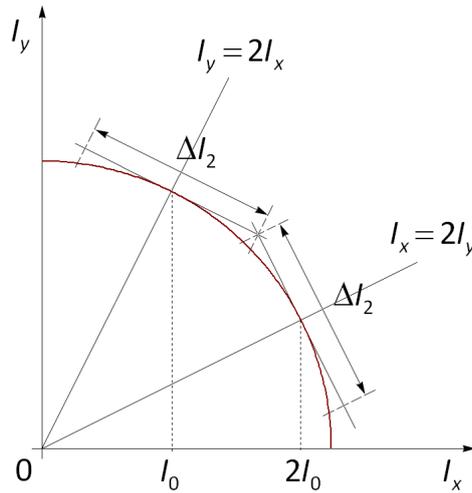


Рис. 5. Ситуация, отвечающая моменту касания невозмущенных сепаратрис двух резонансов связи. В плоскости действий показаны сами резонансы (см. (55)), их ширины (согласно (54)), а также изоэнергетическая кривая (56).

Они оба показаны на рис. 5 прямыми, проходящими через начало координат. Для каждого из двух резонансов показана и ширина  $\Delta I_2$ . Изоэнергетическая кривая имеет вид окружности и определяется уравнением:

$$\frac{\pi^2}{2a^2}(I_x^2 + I_y^2) = E_0. \quad (56)$$

Поставим ей в соответствие также значение действия  $I_0$  следующим образом: пусть  $I_x = I_0$  для центра резонанса  $2I_x = I_y$  и энергии  $E_0$ , тогда

$$\frac{\pi^2}{2a^2}(I_0^2 + (2I_0)^2) = E_0 \Rightarrow I_0^2 = \frac{2a^2}{5\pi^2} E_0. \quad (57)$$

Из геометрических соображений нетрудно получить для момента перекрытия аналог равенства (37) в виде:

$$\frac{\Delta I_2}{2} \cos\left(\arctg \frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta I_2}{2} \sin\left(\arctg \frac{1}{2}\right) = I_0, \quad (58)$$

откуда после подстановки (54) и несложных преобразований найдем критическое значение амплитуды возмущения:

$$\tilde{\mu} = \frac{5\pi^8 I_0^2}{576a^5} \quad (59)$$

или с учетом (57)

$$\tilde{\mu} = \frac{\pi^6 E_0}{288a^3}. \quad (60)$$

Таким образом, найдена искомая оценка для величины амплитуды возмущения  $\mu$ , при превышении которой динамика системы становится хаотической.

**Замечания:**

1. Найденная оценка для критической амплитуды возмущения является довольно грубой. Одна из причин этого связана с тем, что в ряду Фурье (49) была оставлена лишь первая гармоника, хотя их амплитуды убывают вовсе не так быстро, как для осциллятора с кубической нелинейностью в примере 1.
2. Другая причина грубости приближения становится ясна из рис. 5: в рамках локальных резонансных приближений колебания на резонансе происходят перпендикулярно резонансным прямым, т.е. вдоль касательных к изоэнергетической кривой. На самом же деле они должны происходить вдоль самой изоэнергетической кривой, т.к. энергия является интегралом движения, и ее максимальное изменение составляет величину порядка амплитуды возмущения, т.е.  $\mu/4 \cdot (4a/\pi^2)^3$ . Когда резонансы узки, различие несущественно, однако при амплитудах, близких к моменту перекрытия, такое приближение является, очевидно, довольно грубым.
3. Из (60) видно, что критическая амплитуда возмущения является функцией энергии системы, чего не было в примере 1. Положительной чертой сделанной оценки является, очевидно, указание на характер зависимости критической амплитуды от энергии системы, а также от геометрического параметра потенциальной ямы  $a$ .

## Задачи и вопросы для обсуждения

Итак, в рамках этого пособия мы построили резонансную теорию возмущений в системах с двумя и полутора степенями свободы, узнали о перекрытии резонансов и сформулировали соответствующий критерий, а также на конкретных примерах увидели, насколько сложна, интересна и неисчерпаема может быть структура фазового пространства при взаимодействии всего лишь пары резонансов.

Далее предлагаются несколько учебных задач на отработку материала, а также вопросы для обсуждения.

1. Определить частоту малых колебаний на резонансе и ширину резонанса для системы с гамильтонианом:

$$\text{а). } H = \frac{A}{2}(I_x^2 + I_y^2) - \alpha V_0 \cos(\vartheta_x - \vartheta_y); \quad \text{б). } H = AI^{3/2} - \alpha V_0 \sqrt{I} \cos \vartheta \cos \Omega t.$$

Считать  $A, V_0 = \text{const}$ ,  $\alpha \ll 1$ .

2. При каком значении параметра  $\alpha$  резонансы в системе с гамильтонианом

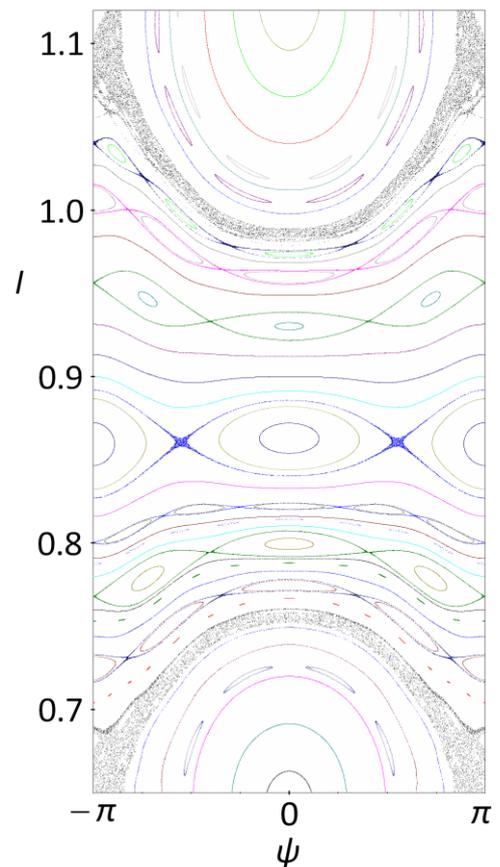
$$H = AI^2 - \alpha V_0 \cos \vartheta (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t)$$

перекроются? ( $A, V_0 = \text{const}$ ,  $\alpha \ll 1$ )

3. На рисунке справа показан увеличенный фрагмент фазового портрета, представленного в середине рис. 4. Резонанс в центре рисунка, как уже говорилось, отвечает частоте  $(\Omega_1 + \Omega_2)/2$ . Каким частотам отвечают другие резонансы, видимые на рисунке?

4. В 1905 г. в Петербурге произошло событие, вошедшее в учебники не только истории, но и физики и даже в «Строевой Устав», куда вписали новую военную команду «Идти не в ногу». Эта команда до сих пор там присутствует! Что произошло, и что говорит физика о причинах события?

5. Как известно, между орбитами Марса и Юпитера расположено астероидное кольцо. Есть версия, что причиной образования люков Кирквуда (провалов в плотности распределения астероидов) являются резонансы. Что и с чем именно резонирует? В чем механизм дрейфа астероидов с одной орбиты на другую?



## Рекомендуемая литература

- [1]. [Chirikov B.V., Physics Reports 52, 263 \(1979\).](#)
- [2]. [Чириков Б.В., «Нелинейный резонанс», учебное пособие НГУ, Новосибирск, 1977.](#)
- [3]. Чириков Б.В., «Взаимодействие нелинейных резонансов», учебное пособие НГУ, Новосибирск, 1978.
- [4]. [Лихтенберг А., Либерман М., «Регулярная и стохастическая динамика», М.: Мир, 1984.](#)
- [5]. Заславский Г.М., «Стохастичность динамических систем», М.: Наука, 1984 (доступно [здесь](#)).
- [6]. Заславский Г.М., «Физика хаоса в гамильтоновых системах», Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
- [7]. [А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин, «Нелинейные колебания», М.: Физматлит, 2002.](#)
- [8]. [А.Ю. Лоскутов, УФН 177, 989 \(2007\).](#)
- [9]. [Малышев А.И., Нелинейная динамика 5\(3\), 425 \(2009\).](#)
- [10]. Малышев А.И., Чижова Л.А., Изв. вузов. ПНД **17(1)**, 46 (2009).

## Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>I. Резонанс связи двух степеней свободы</b>	<b>4</b>
<b>II. Резонанс в системе с полутора степенями свободы</b>	<b>8</b>
<b>III. Перекрывание резонансов. Критерий Чирикова</b>	<b>11</b>
<b>IV. Примеры</b>	<b>13</b>
Пример 1	13
Пример 2	15
<b>Задачи и вопросы для обсуждения</b>	<b>19</b>
<b>Рекомендуемая литература</b>	<b>20</b>

Александр Игоревич **Малышев**

**Избранные главы теории нелинейных колебаний:  
резонансная теория возмущений**

*Учебно-методическое пособие*

Государственное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования «Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского».  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать 19.06.2012